

TD 34 : Théorie de l'intégration

Calcul d'intégrales (piqûre de rappel)

1 ★★ (Calcul d'intégrales) Calculer les intégrales suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1) $\int_0^1 t^2(t^3 + 1)^5 dt$ | 5) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sin t + \tan t}$ |
| 2) $\int_{\ln 3}^{\ln 7} \frac{dt}{1 - 4e^{-2t}}$ | 6) $\int_1^8 \frac{dt}{2\sqrt[3]{t} - 1}$ |
| 3) $\int_2^5 \frac{dt}{t^2 - t}$ | 7) $\int_1^2 \frac{t+1}{t^2 - t - 6} dt$ |
| 4) $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) dt$ | 8) $\int_{-2}^2 t t dt$ |
| 9) $\int_{-1}^1 \frac{t}{(t^2 + t + 1)(t^2 - t + 1)} dt$ | |

2 ★★ Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 t e^{i2\pi t} dt \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^{it} + 1} dt$$

Propriétés de l'intégrale

3 ★★ Pour chacune de ces fonctions, donner l'ensemble de définition, de dérivabilité puis calculer la dérivée :

$$f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t^2 + 1} dt \quad g : x \mapsto \int_2^{2x} \frac{1}{\ln t} dt$$

$$h : x \mapsto \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \arctan(t^2) dt$$

4 ★★ Déterminer les limites suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ | 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n} dx$ |
| 3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sqrt{1+x^n} dx$ | |

5 ★★ Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f \leq 1$ et $\int_0^1 f = 1$. Montrer que $f \equiv 1$.

6 ★★ (Lemme de Riemann-Lebesgue) Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

1) On suppose f de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. Montrer que

$$\int_a^b f(t) \sin(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

2) Montrer que le résultat est encore vrai si f est en escalier sur $[a, b]$.

3) En déduire que le résultat est encore vrai si f est continue par morceaux sur $[a, b]$.

7 ★★★ Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt \iff f \geq 0 \text{ ou } f \leq 0$$

8 ★★★ Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ une fonction telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Formules de Taylor

9 ★ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$$

En déduire, pour tout réel x , la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

10 ★ Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) \right| \leq \frac{|x|^7}{7!}$$

11 ★★ Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ une fonction convexe et $a \in \mathbb{R}$. Par la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$$

Quel résultat connu retrouve-t-on ainsi ?

12 ★★ Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt$$

- 1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. On pourra intégrer par parties.
- 2) Montrer que f possède une limite finie en 0 que l'on déterminera. On pourra étudier le comportement quand x tend vers 0 de

$$\int_x^{2x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$$

13 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) En justifiant sa validité, écrire la formule de Taylor avec reste intégral d'ordre n pour la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$.
- 2) En déduire la limite de la suite de terme général

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Sommes de Riemann

14 ★★ Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$
- 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)}$
- 3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$
- 4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{2^1} + \dots + \sqrt[n]{2^n}}{n}$

15 ★★ En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent pour les suites suivantes :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^3}$$

16 ★★ Est-ce que l'application $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$? Et sur $[1, +\infty[$? En déduire si f est uniformément continue sur \mathbb{R}_+ .

Même questions pour $g : x \mapsto \ln x$ sur $]0, 1]$, puis $[1, +\infty[$ et enfin \mathbb{R}_+^* .

17 ★★ Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application uniformément continue. Montrer que f est bornée. Le résultat est-il encore vrai si f est seulement supposée continue ?